第2讲 正比例函数

**课前思考**

某商店销售某种型号的水笔，销售情况记录如下：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 售出水笔数(支) | 2 | 5 | 4 | 3 | 10 | 15 | … |
| 营业额(元) | 5 | 12.5 | 10 | 7.5 | 25 | 37.5 | … |

在表中任取一组数据，求营业额与售出水笔数的比值.

在表中任取一组数据，求营业额与售出水笔数的比值，如…，可见它们的比值都是相等的.这个比值，也就是水笔的单价2.5(元/支).

设售出的水笔的数量为*x*支(*x*是正整数)，相应的营业额为*y*元，那么也可表示为*y*=2.5*x*.

一个正方形的周长随边长变化而变化.设正方形的边长为*x*(*x*>0)，周长为*y*，那么*y*=4*x*，也可表示为

**知识梳理**

**1．正比例概念**

如果两个变量的每一组对应值的比值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，那么就说这两个变量\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.用数学式子表示两个变量*x*、*y*成正比例，就是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_或表示为*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*，*k*是不等于零的常数.

**2.正比例函数**

解析式形如*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*的函数叫做**正比例函数**，其中常数*k*叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

正比例函数*y*=*kx*的**定义域**是一切实数.

正比例函数解析式的结构特征：

①*k*为常数且*k*≠\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；②*x*的次数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

确定了比例系数，就可以确定一个正比例函数的解析式.

**3.正比例函数的图像**

一般地，正比例函数*y*=*kx*(*k*是常数，*k*)的图像是经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**.我们把正比例函数*y*=*kx*的图像叫做直线*y*=*kx*.

通常画正比例函数*y*=*kx*(*k*≠0)的图像只需取一点\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，然后过原点和这一点画直线就可以了.

**4.正比例函数性质**

(1)当*k*>0时，正比例函数的图像经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限；自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值也随着逐渐\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

(2)当*k*<0时，正比例函数的图像经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限；自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值则随着逐渐\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**1．正比例概念**

如果两个变量的每一组对应值的比值是一个常数(这个常数不等于零)，那么就说这两个变量成正比例.用数学式子表示两个变量*x*、*y*成正比例，就是或表示为*y*=*kx*(*x*不等于0)，*k*是不等于零的常数.

**2.正比例函数**

解析式形如*y*=*kx*(*k*是不等于零的常数)的函数叫做**正比例函数**，其中常数*k*叫做比例系数.

因变量和自变量的比值是一个常数.

正比例函数*y*=*kx*的**定义域**是一切实数.

正比例函数解析式*y*=*kx*(*k*≠0)的结构特征：

①*k*≠\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；②*x*的次数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；③常数项*b*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**3.正比例函数的图像**

一般地，正比例函数*y*=*kx*(*k*是常数，*k*)的图像是经过原点*O*(0,0)和点*M*(1，*k*)的**一条直线**.我们把正比例函数*y*=*kx*的图像叫做直线*y*=*kx*.

通常画正比例函数*y*=*kx*(*k*≠0)的图像只需取一点\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，然后过原点和这一点画直线就可以了.

**4.正比例函数性质**

(1)当*k*>0时，正比例函数的图像经过第一、三象限；自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值也随着逐渐增大.

(2)当*k*<0时，正比例函数的图像经过第二、四象限；自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值则随着逐渐减小.

**典型解析**

**例1：**下列函数关系中，是正比例关系的有( )个.

①正方形的周长*C*和边长*a*之间的关系；

②正方形的面积*S*和边长*a*之间的关系；

③矩形的面积*S*一定时，长*a*和宽*b*之间的关系；

④矩形的长*a*一定时，面积*S*和宽*b*之间的关系；

⑤*y*=3*x*-4中，*y*和*x*之间的关系；

⑥*y*=3*x*-4中，*y*+4和*x*之间的关系.

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

答案：B

两个变量成正比例，说明其中一个变量是另一个变量的函数.

**【变式训练】**

下列说法中不成立的是( *D* )

A．在中与成正比例； B．在中与成正比例

C．在中与成正比例； D．在中与成正比例

**例2：**下列函数中，是正比例函数的是( ).

[解析]②中关于自变量*x*的式子不是整式；③中*y*=1+5*x*不符合*y*=*kx*(*k*≠0)的形式；④中*y*=*x*2-5*x*关于自变量*x*的式子不是一次单项式，所以②③④不是正比例函数.而①⑤符合正比例函数*y*=*kx*(*k*≠0)的定义条件：*k*为常数且*k*≠0，变量次数为1，是正比例函数.

[点评]正比例函数*y*=*kx*必须符合下列两个条件：一是两个变量的次数都是1；二是比例系数*k*≠0.

**例3：**已知*y*是*x*的正比例函数，且当*x*=3时，*y*=24.求*y*与*x*之间的比例系数，并写出函数解析式和函数的定义域.

←在求正比例函数的解析式时，先设解析式为*y*=*kx*(*k*≠0)，其中系数*k*待定；再利用已知条件确定*k*的值.这样的方法称为“待定系数法”.

解：因为*y*是*x*的正比例函数，可设函数解析式为*y*=*kx*(*k*≠0).

把*x*=3，*y*=24代入解析式，得

24=3*k*.

解得*k*=8.

所以，*y*与*x*之间的比例系数是8；函数解析式是*y*=8*x*，函数的定义域为一切实数.

**例4：**(1)已知是正比例函数，求的取值范围.

如果是正比例函数，那么*m*的值是多少？

(2)已知是正比例函数，求的值.写出这个正比例函数，并求出当变量分别取，，时的函数值.

解：(1)*m*≠,*m*=3

(2)*k*=1, *f*(*x*)=3*x*

*f*(-3)=-9，*f*(0)=0，*f*()=3

**【变式训练】**

已知函数*y*=(*m*+3)*x*+*m*2-9是正比例函数，求*m*的值.

根据正比例函数的定义，得解得*m*=3.

即当*m*=3时，该函数为正比例函数.

**例5：**在平面直角坐标系中画出函数和的图像.

****

**【变式训练】**

在同一直角坐标平面内，分别画出下列函数的图像：

(1)； (2)

分析：画正比例函数图像，可先取图像上的两个点，再过这两点画一条直线.为了方便，我们通常取原点*O*(0，0)和点*M*(1，*k*).但有时为了在画直线时能准确地定位，所取的两点不宜太靠近.

←画直线*y*=*x*和直线*y*时各取点*B*(2，2)和*C*(3，1)，而不取坐标为(1，1)和的点，是为使所选取的点离原点*O*远一些.

解：选取点*O*(0，0)和*A*(1，3)，过这两点画一条直线，就得到函数*y*=3*x*的图像.

选取点*O*(0，0)和*B*(2，2)，过这两点画一条直线，就得到函数*y*=*x*的图像.

选取点*O*(0，0)和*C*(3，1)，过这两点画一条直线，就得到函数的图像.

这三个函数的图像如图*a*所示.

Image14

上面三个函数的图像如图*b*所示.

Image15

**例6：**若函数*y*=(*m*-1)是正比例函数，则*m*= ，函数的图像经过 象限.

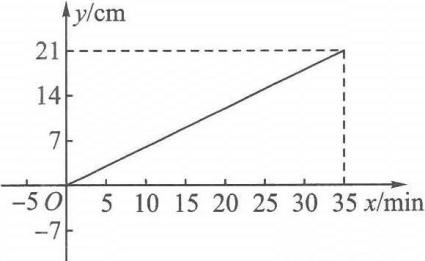
解：*m*=4，图像经过第一、三象限.

**例7：**(1)已知正比例函数*y*=(2*m*-1)*x*的图像上两点*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，当*x*1<*x*2时，有*y*1>*y*2，那么*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

(2)若正比例函数*y*=(1-*m*)*x*的图像经过点*A*(*x*1，*y*1)和点*B*(*x*2，*y*2)，当*x*1<*x*2时，*y*1＜*y*2，则*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1) *m*<；(2)*m*＜1

**例8：**小华在做燃烧蜡烛的实验时，发现蜡烛被燃烧的长度与燃烧时间成正比.实验表明长为21cm的某种蜡烛，点燃6min后，蜡烛变短了3.6cm，设这种蜡烛点燃*x*min后变短了*y*cm，求：(1)*y*与*x*的函数解析式；(2)这种蜡烛几分钟后燃烧完？(3)画出此函数的图像.

答案：(1)依题意可设*y*=*kx*(*k*≠0).

因为当*x*=6时，*y*=3.6.

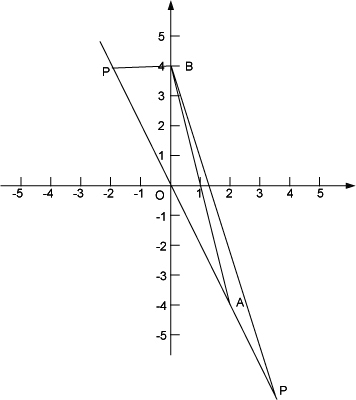
所以3.6=*k*×6，即*k*=0.6，所以*y*=0.6*x*.

(2)当*y*=21时，0.6*x*=21，即*x*=35.

所以这种蜡烛35min后燃烧完.

(3)过点(0，0)和(35，21)作线段，即为此函数的图像，如图所示.

**例9：**已知正比例函数过*A*(2，-4)，点*P*在此正比例函数的图像上，若直角坐标平面内另有一点*B*(0，4)，且，求：点*P*的坐标.



解：设正比例函数解析式为*y*=*k*·*x* (*k*)

已知正比例函数过*A*(2，-4)

∴-4=2*k*，解得*k*=-2，

∴正比例函数的解析式为*y*=-2*x*

如图所示，画出直线*y*=-2*x*，并标出*A*，*B*两点的位置，

分析题意，点*P*的坐标要分两种情况讨论.

设点*P*的坐标为(*x*，-2*x*)

1)若点*P*在第二象限，则

根据题意，得8=

8= 解得=2 又点*P*在第二象限，∴=-2 ∴点*P*的坐标为(-2，4)

2)若点*P*在第四象限，则 根据题意，得8=

解得=6 又点*P*在第四象限，∴=6 ∴点*P*的坐标为(6，-12)

∴在正比例函数图像上适合条件的*P*点有两个：(-2，4)，(6，-12)

**同步训练**

**一、填空题**

1.已知正比例函数*y*=-8*x*，比例系数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；当变量*x*取-3时的函数值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；当函数值*y*取-3时，变量*x*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：-8；24；

2.若*x*、*y*是变量，且函数*y*=(*k*+1)是正比例函数，则*k*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：1

3.已知*y*与*x*2成正比例，且*x*=-2时，*y*=12，则*y*关于*x*的函数关系式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_；当*x*=-1时，*y*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；当*y*=15时，*x*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

4.在正比例函数*y*=(*k*2+1)*x*中，*y*随*x*的减小而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：减小

5.若正比例函数*y*=(3-2*m*)*x*的图像经过第二、四象限，则*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

6.(1)如果正比例函数图像经过点(-1，3)，那么它的函数解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)如图1，点*A*在正比例函数图像上，那么此正比例函数的解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(3)如图2，已知函数的图像满足条件：∠1=∠2且直线经过原点，那么此函数的解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(4)如图3，在长方形*ABCD*中，对角线*AC*与*BD*交于点*O*，以*O*为坐标原点建立直角坐标系，使*x*轴和*y*轴分别与两组对边平行.已知长方形的长*AB*为12，宽*BC*为9，则直线*AC*的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；直线*BD*的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

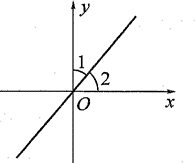
Image8  Image5

图1 图2 图3

答案：(1)*y*=-3*x*；(3)*y*=*x*；(4)

±

**二、选择题**

7．若函数是正比例函数，则的值是( *A* )

A．*m*=-3 B．*m*=1 C．*m*=3 D．*m*>-3

8.已知函数*y*=-*x*，下列结论正确的是( ).

(A)函数图像经过点(-1，3) (B)函数图像经过一、三象限

(C)*y*随*x*的增大而减小 (D)不论*x*取何值，总有*y*<0

答案：C

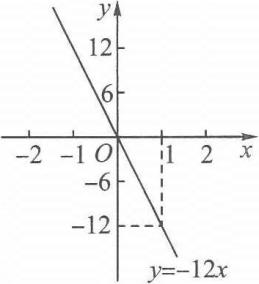
**三、解答题**

9.已知函数*y*=(|*a*|-3)*x*2+2(*a*-3)*x*是关于*x*的正比例函数.

(1)求正比例函数的解析式；(2)画出它的图像.

答案：(1)要使原函数是正比例函数，则解得*a*=-3，此时*y*=-12*x*.

(2)在坐标轴上过点(0，0)和点(1，-12)作直线可得函数*y*=-12*x*的图像，如图所示.



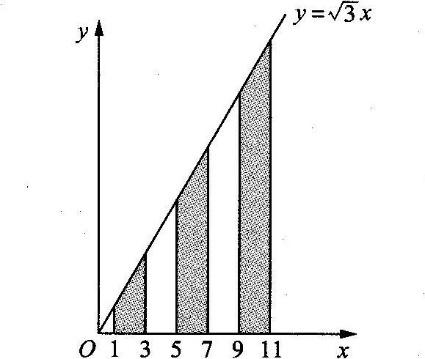
10.(1)已知*y*=*ax*是经过第二、四象限的直线，且在实数范围内有意义，求*a*的取值范围.

(2)已知函数*y*=(2*m*+1)*x*的值随自变量*x*的值增大而增大，且函数*y*=(3*m*+1)*x*的值随自变量*x*的增大而减小，求*m*的取值范围.

解：(1)根据题意得*a*<0，*a*+3≥0 ∴-3≤*a*<0

(2) 根据题意得2*m*+1>0，3*m*+1<0 解得-1/2<*x*<-1/3

**【探索创新】**

如图所示，一系列“黑色梯形”是由*x*轴、直线*y*=*x*和过*x*轴上的正奇数1，3，5，7，9，…所对应的点且与*y*轴平行的直线围成的.从左到右，将其面积依次记为*S*1，*S*2，*S*3，…，*Sn*，则*S*1=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*Sn*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

**走进中考**

(2015·上海中考) 下列*y*关于*x*的函数中，是正比例函数的为( )

(A)*y*＝*x*2； (B)*y*＝； (C)*y*＝； (D)*y*＝．

【答案】C

【解析】，是正比例函数，选C.

正比例函数练习题



1．下列函数关系中，属于正比例函数关系的是(　　)

A．圆的面积*S*与它的半径*r*

B．长方形的面积是常数*S*时，它的长*y*与宽*x*

C．路程是常数*s*时，行驶的速度*v*与时间*t*

D．三角形的底边长是常数*a*时，它的面积*S*与这条边上的高*h*

2．下列关系式中，表示*y*是*x*的正比例函数的是(　　)

A．*y*＝ B．*y*＝ C．*y*＝*x*＋1 D．*y*＝2*x*2

3．正比例函数*y*＝－2*x*的大致图象是(　　)



4．下列关于正比例函数*y*＝3*x*的说法中，正确的是(　　)

A．当*x*＝3时，*y*＝1 B．它的图象是一条过原点的直线

C．*y*随*x*的增大而减小 D．它的图象经过第二、四象限

5．经过下列一组点可以画出函数*y*＝2*x*的图象的是(　　)

A．(0，0)和(2，1) B．(1，2)和(－1，－2)

C．(1，2)和(2，1) D．(－1，2)和(1，2)

6．下列四个实际问题中的两个变量之间的关系，属于正比例函数关系的是(　　)

A．有一个边长为*x*的正方体，则它的表面积*S*与边长*x*之间的函数关系

B．某梯形的下底长为5 cm，高为3 cm，上底长为*x* cm(0＜*x*＜5)，则梯形的面积*S*与上底长*x*之间的函数关系

C．如果直角三角形中一个锐角的度数为*x*，那么另一个锐角的度数*y*与*x*之间的关系

D．一场电影票的票价*a*(元/张)一定时，该场电影的票房收入*m*(元)与出售票数*n*(张)之间的关系

7．若*y*＝*x*＋2－*b*是正比例函数，则*b*的值是(　　)

A．0 B．－2 C．2 D．－0.5

8．已知*y*＝(*m*＋1)*xm*2，若*y*是*x*的正比例函数，则*m*的值为(　　)

A．1 B．－1 C．1或－1 D．0

9．若一个正比例函数的图象经过不同象限内的两点*A*(－2，*m*)，*B*(*n*，3)，那么一定有(　　)

A．*m*＞0，*n*＞0 B．*m*＞0，*n*＜0

C．*m*＜0，*n*＞0 D．*m*＜0，*n*＜0

10．定义新运算“△”为：*a*△*b*＝如：1△(－2)＝－1×(－2)＝2，则函数*y*＝2△*x*的图象大致是(　　)



11．如图，三个正比例函数的图象对应的解析式分别是：①*y*＝*ax*，②*y*＝*bx*，③*y*＝*cx*，则*a*，*b*，*c*的大小关系是(　　)



A．*a*＞*b*＞*c* B．*c*＞*b*＞*a* C．*b*＞*a*＞*c* D．*b*＞*c*＞*a*

12．已知正比例函数*y*＝*kx*(*k*≠0)的图象如图所示，则在下列选项中*k*值可能是(　　)



A．1 B．2 C．3 D．4

13．正比例函数*y*＝*kx*的图象如图所示，则*k*的取值范围是(　　)



A．*k*＞0 B．*k*＜0 C．*k*＞1 D．*k*＜1

14．一次函数*y*＝4*x*，*y*＝－7*x*，*y*＝－*x*的共同点是(　　)

A．图象位于同样的象限

B．*y*随*x*的增大而减小

C．*y*随*x*的增大而增大

D．图象都过原点

15．已知正比例函数*y*＝(2*k*＋1)*x*，若*y*随*x*的增大而减小，则*k*的取值范围是(　　)

A．*k*＞－ B．*k*＜－ C．*k*＝ D．*k*＝0

16．对于正比例函数*y*＝*kx*(*k*≠0)，当自变量*x*的值减小2时，函数*y*的值减小－6，则*k*的值为(　　)

A. B．－

C．3 D．－3

17．已知函数*y*＝(3*m*＋9)*x*2＋(2－*m*)*x*是关于*x*的正比例函数，求*m*的值．

18．若*y*与*x*成正比例，*x*与*z*成正比例，试证：*y*与*z*也成正比例．

19．已知*y*＝(*k*－3)*x*＋*k*－9是关于*x*的正比例函数，求当*x*＝－4时，*y*的值．

20．已知*z*＝*m*＋*y*，*m*是常数，*y*是*x*的正比例函数．当*x*＝2时，*z*＝1；当*x*＝3时，*z*＝－1，求*z*与*x*之间的函数解析式．

4．已知一次函数*y*1＝2*x*与*y*2＝5*x*.

(1)在同一直角坐标系中画出这两个函数的图象；

(2)预测哪一个函数的函数值先达到100.

21．高新开发区某企业生产的产品的出厂价为每件50元，成本价为每件25元，另外在生产过程中，平均每生产一件产品有0.5 m3污水排出，为了绿色环保达到排污标准，该企业将污水排到污水厂统一处理，每处理1 m3污水的费用为14元，设该企业每月生产*x*件产品，每月利润为*y*元，*y*与*x*成正比例吗？如果成正比例，那么求出比例系数．

22．已知函数：*y*＝*x*，*y*＝－2*x*，*y*＝*x*，*y*＝3*x*.

(1)在同一坐标系内画出这些函数的图象；

(2)探索发现：

观察这些函数的图象可以发现，随着|*k*|的增大，直线与*y*轴的位置关系有何变化？

(3)灵活运用：

已知正比例函数*y*1＝*k*1*x*，*y*2＝*k*2*x*在同一坐标系中的图象如图所示，则*k*1与*k*2的大小关系为\_\_\_\_\_\_\_\_．

23．已知正比例函数*y*＝(2*m*＋4)*x*.求：

(1)*m*为何值时，函数图象经过第一、三象限；

(2)*m*为何值时，*y*随*x*的增大而减小？

(3)*m*为何值时，点(1，3)在该函数图象上？

24．已知正比例函数*y*＝(*m*－1)*x*的图象上有两点*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，当*x*1＜*x*2时，有*y*1＞*y*2.

(1)求*m*的取值范围；

(2)当*m*取最大整数时，画出该函数的图象．

解题突破

⑩当*x*1＜*x*2时，有*y*1＞*y*2，可以理解成函数*y*的值随自变量*x*值的增大而减小．

25．已知正比例函数*y*＝(1－2*a*)*x*.

(1)若函数的图象经过第一、三象限，试求*a*的取值范围．

(2)若点*A*(*x*1，*y*1)和点*B*(*x*2，*y*2)为函数图象上的两点，且当*x*1＜*x*2时，*y*1＞*y*2，试求*a*的取值范围．

(3)若函数的图象经过点(－1，2)．

①求此函数的解析式并作出其图象；

②如果*x*的取值范围是－1＜*x*＜5，求*y*的取值范围．

第3讲 反比例函数

**知识梳理**

**1．反比例**

如果两个变量的每一组对应值的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_是一个不等于零的常数，那么就说这两个变量成**反比例**．用数学式子表示两个变量*x*、*y*成反比例，就是*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*，或表示为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，其中*k*是不等于零的常数．

如果两个变量的每一组对应值的乘积是一个不等于零的常数，那么就说这两个变量成**反比例**.用数学式子表示两个变量*x*、*y*成反比例，就是*xy*=*k*，或表示为其中*k*是不等于零的常数.

**2．反比例函数**

解析式形如\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(*k*是常数，*k*≠0)的函数叫做**反比例函数**，其中*k*也叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

自变量和因变量的乘积是一个不等于零的常数． 反比例函数由系数*k*确定．

反比例函数的定义域是不等于零的所有实数．

**[注意]**(1)从形式上，反比例函数的左边是函数，右边是分母为自变量*x*的分式，分母不能是多项式，只能是*x*的一次单项式，其核心是*x*、*y*的乘积为一个非零常数.如都不是反比例函数.

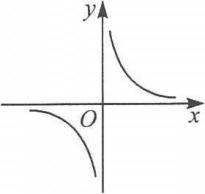
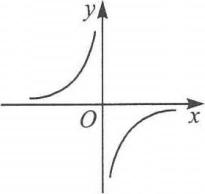
(2)在中，自变量*x*是分式的分母.当*x*=0时，分式无意义，所以*x*≠0.

(3)由于反比例函数(*k*为常数，*k*≠0)中，*x*、*y*、*k*均为非零实数，所以反比例函数也可以表示为*y*=*kx*-1(*k*为常数，*k*≠0)的形式，或*xy*=*k*(*k*为常数，*k*≠0)的形式.

**3．反比例函数的图像和性质**

反比例函数(*k*为常数，*k*≠0)的图像是由两条曲线组成的，这两条曲线通常称为**双曲线**．当*k*>0时，两个分支分别位于第一、三象限内(如左图所示)．

当*k*<0时，两个分支分别位于第二、四象限(如右图所示)

**[注意]**(1)由反比例函数的解析式中的比例系数*k*的值，不仅可以判断其图像的位置，也可以画出具体的图像(双曲线)．

(2)由于反比例函数中，*x*、*y*的值不能为零，所以其图像——双曲线的两个分支可以无限靠近坐标轴，但它们永远不会与坐标轴相交．

(3)反比例函数的图像既是中心对称图形，也是轴对称图形，其对称中心是**坐标原点**；对称轴是**两坐标轴夹角平分线**所在的直线．

**反比例函数(*k*是常数，*k*≠0)有如下性质**：

(1)当*k*>0时，函数图像的两支分别在\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限；在每个象限内，当自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值随着逐渐\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(2)当*k*<0时，函数图像的两支分别在\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限；在每个象限内，当自变量*x*的值逐渐增大时，*y*的值随着逐渐\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**[注意]**(1)描述反比例函数值的增减情况时，必须指出在“哪个象限内”，即研究反比例函数的增减性时，只能在每个分支所在的象限内讨论，尽管这两个分支的增减性相同，也不能笼统地合在一起.

(2)反比例函数图像的位置和函数的增减性都是由比例系数*k*的符号决定的.反过来，由双曲线所在位置或函数的增减性，也可以推出*k*的符号.

**4．反比例函数(*k*为常数，*k*≠0)中比例系数*k*的几何意义**

(1)如图，在反比例函数的图像上任取一点*P*(*x*，*y*)，过这一点分别作*x*轴、*y*轴的垂线*PM*，*PN*，垂足分别为点*M*、*N*，所得的矩形*PMON*的面积*S*=*PM*·*PN*=|*y*|·|*x*|=|*xy*|，因为所以*xy*=*k*，所以*S*=|*k*|，即过双曲线上任意一点作*x*轴、*y*轴的垂线，所得的矩形面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．|*k*|.

(2)如图所示，在反比例函数0)的图像上任取一点*E*，过点*E*作*EF*⊥*y*轴于点*F*，连接*OE*，因为点*E*在反比例函数的图像上，设点*E*(*x*，*y*)，那么*xy*=*k*，且*EF*=|*x*|，*OF*=|*y*|，所以*S*△*EOF*=.即过双曲线上任意一点作一坐标轴的垂线，并将该点与原点相连，所得三角形的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

[注意](1)在利用反比例函数的比例系数*k*的几何意义时，不仅要注意矩形的面积大小，还要注意函数图像的位置，从而确定*k*的值；

(2)因为中*k*有正、负之分，所以在利用函数解析式求矩形、三角形面积时，都加上绝对值符号.

**5．反比例函数图像和性质的应用**

一般地，反比例函数图像和性质的应用大体包括两个方面：一是利用反比例函数解决生活实际问题；二是解决和反比例函数本身有关的数学问题．如求字母系数的值和取值范围，与几何图形结合起来考查有关知识．

**典型解析**

**例1：**下列问题中的两个变量是否成反比例？如果是，可以用怎样的数学式子来表示？

(1)平行四边形的面积为20平方厘米，变量分别是平行四边形的一条边长*a*(厘米)和这条边上的高*h*(厘米)；

(2)被除数为100，变量分别是除数*r*和商*q*；

(3)一位男同学练习1000米长跑，变量分别是男生跑步的平均速度*v*(米/秒)和跑完全程所用的时间*t*(秒).

解：(1)平行四边形的一条边长*a*(厘米)和这条边上的高*h*(厘米)的乘积*ah*=20(平方厘米)，所以*a*与*h*成反比例，*a*与*h*的关系可表示为

(2)当被除数为100时，除数*r*和商*q*的乘积*rq*=100，所以*r*与*q*成反比例，*r*与*q*的关系可表示为

(3)当路程为1000米时，跑步的平均速度*v*(米/秒)和跑完全程所用的时间*t*(秒)的乘积*vt*=1000，所以*v*与*t*成反比例，*v*与*t*的关系可表示为

**例2：**(1)下列函数：其中*y*是*x*的反比例函数的是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(填序号).*[解析]反比例函数解析式的三种常见形式：(k为常数，k≠0)，y=kx-1(k为常数，k≠0)，xy=k(k为常数，k≠0)，其核心是x、y的乘积为一个非零常数.当a为不等于0的常数时是反比例函数，否则不是反比例函数*.

[答案]②⑤

(2)若*y*=(*a*+1)是反比例函数，则*a*的取值为( ).

A．1 B．-1 C．±1 D．任意实数

*[解析]由反比例函数的概念知，a2-2=-1且a+1≠0，解得a=1.*

*[答案]A*

**【变式训练】**

若函数为关于*x*的反比例函数，求*m*的值．

[错解]因为函数为关于*x*的反比例函数，所以|*m*|=1，解得*m*=±1.

[错解分析]错解中忽略了反比例函数0)中的隐含条件*k*≠0，即*m*+1≠0，所以*m*≠-1.

[正解]根据反比例函数定义，得解得*m*=1.

**例3：**已知*y*是*x*的反比例函数，且当*x*=+2时，*y*=-2，求当*y*=+1时，*x*的值．

**分析：**对于反比例函数，确定了比例系数就可以确定这个反比例函数的解析式.因此可以将*x*=+2，*y*=-2代入，求得比例系数.

**解：**设反比例函数为

把*x*=+2，*y*=-2代入，得

解得*k*=-1.

因此，反比例函数解析式为.

把*y*=+1代入反比例函数解析式，得

解得*x*=-+1.所以当*y*=+1时，*x*的值为-+1.

**例4：**已知*y*=*y*1+*y*2，*y*1与*x*+1成正比例，*y*2与*x*+1成反比例，当*x*=0时，*y*=-5；当*x*=2时，*y*=-7．(1)求*y*与*x*的函数关系式．(2)当*y*=5时，求*x*的值．

答案：

**【变式训练】**

已知*y*=*y*1-*y*2，*y*1与成正比例，*y*2与*x*成反比例，且当*x*=1时，*y*=-14，*x*=4时，*y*=3．求：(1)*y*与*x*之间的函数关系式．(2)自变量*x*的取值范围．(3)当时，*y*的值．

答案：(1)(2)*x*>0；(3)-69.

**例5：**画反比例函数和的图像．

画反比例函数的图像.

(1)列表：反比例函数的定义域是不等于零的所有实数，在列表时，自变量*x*的值不能取零，可以取一些正数和负数，计算出相应的函数值*y*，如下表所示：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | … | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
| *y* | … | -1 | - | - | - | -2 | - | -4 | -8 | 8 | 4 |  | 2 |  |  |  | 1 | … |

(2)描点：分别以*x*所取的值和相应的*y*值作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点.

(3)连线：把第一象限内的各点用光滑的曲线连接，再向两方伸展，得到图像的一支；

用同样的方法在第三象限画出图像的另一支.

函数的图像如图所示.

Image17

画反比例函数的图像.

(1)列表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | … | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
| *y* | … |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | … |

(2)描点；

(3)连线.

函数的图像如图所示.

反比例函数(*k*是常数，*k*≠0)的图像叫做双曲线(hyperbola)，它有两支.

Image18

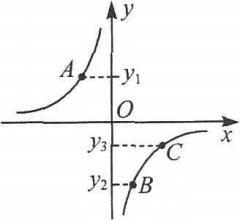
你能说出这两个函数图像的异同吗？

相同点：(1)它们的图像都是由两支曲线组成；(2)它们的图像与两坐标轴都没有交点；(3)它们的形状相同；(4)分别关于原点对称.

不同点：函数的图像的两支分布在一、三象限；函数的图像的两支分布在二、四象限.

****

**例6：***A*(-1，*y*1)，*B*(1，*y*2)，*C*(3，*y*3)是反比例函数*y*=图像上的三点，请你正确排出*y*1、*y*2、*y*3的大小顺序．

解决这个问题我们可以先画一个草图，并描出*A*、*B*、*C*三点的大致位置(如图所示)，然后借助其增减性(或直接观察图像)即可比较它们的大小.

由此，我们容易得到*y*1>*y*3>*y*2这一结论.

[注意](1)反比例函数的图像是相互独立、断开的，并且是关于原点对称的双曲线，但在每个分支上的各点都是连续的.

(2)借助反比例函数及其图像比较实数的大小要抓住两点：①比较的实数所涉及的点的坐标是否在同一个分支上；②只有在同一个分支上的点，才能借助其增减性比较实数的大小.

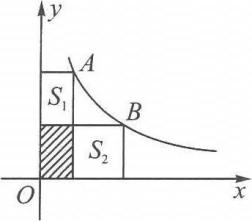
**【变式训练】**

已知点(-2，*y*1)，(-1，*y*2)，(3，*y*3)在反比例函数(*m*为常数)的图像上，试比较*y*1，*y*2，*y*3的大小．

[错解]因为-*m*2-1=-(*m*2+1)<0，所以函数的图像在第二、四象限内，且*y*随*x*的增大而增大，又-2<-1<3，因此*y*1<*y*2<*y*3.

[错解分析]由于反比例函数的图像有两支曲线，因此在比较函数值的大小时应分两种情况来考虑，错解中未将已知的三个点分两种情况来考虑，只是根据当*k*<0时，函数值*y*随*x*的增大而增大进行判断，从而出现解题错误.

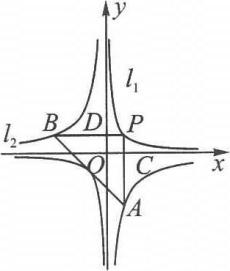
[正解]因为-*m*2-1=-(*m*2+1)<0，所以函数的图像在第二、四象限内，且在每一个象限内，*y*随*x*的增大而增大.因为点(-2，*y*1)，(-1，*y*2)在第二象限内，且-2<-1，所以0<*y*1<*y*2.因为点(3，*y*3)在第四象限内，所以*y*3<0.所以*y*3<*y*1<*y*2.

**例7：**如图所示，*A*、*B*两点在双曲线上，分别经过*A*、*B*两点向坐标轴作垂线段，已知*S*阴影=1，则*S*1+*S*2等于( )．

A．3 B．4 C．5 D．6

*[解析]已知点A、B是双曲线上的点，分别经过A、B两点向x轴、y轴作垂线段，则根据反比例函数的图像的性质和k的几何意义得两个矩形的面积都等于|k|=4，∴S1+S2=4+4-1×2=6.*

*[答案]D*

**例8：**如图所示，函数和的图像分别是*l*1和*l*2．设点*P*在*l*1上，*PC*⊥*x*轴，垂足为*C*，交*l*2于点*A*，*PD*⊥*y*轴，垂足为*D*，交*l*2于点*B*，则三角形*PAB*的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

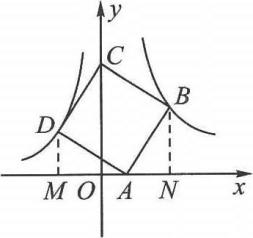
*[解析]∵点P在上，∴|xp|×|yp|=|k|=1，∴设P的坐标是(a为正数).∵PA⊥x轴，∴A点的横坐标是a.∵A点在上，∴A点的坐标是.∵PB⊥y轴，∴B点的纵坐标是点在上，∴代入得解得x=-3a，∴B点的坐标是PB=|a-(-3a)|=4a.∵PA⊥x轴，PB⊥y轴，x轴⊥y轴，∴PA⊥PB，∴△PAB的面积是4a=8. 故填8.*

*[答案]8*

*[点评]根据反比例函数的图像和性质，结合三角形面积公式，由P点坐标得出A、B点的坐标是解题的关键.*

**例9：**如图所示，点*B*(3，3)在双曲线上，点*D*在双曲线上，点*A*和点*C*分别在*x*轴、*y*轴的正半轴上，且点*A*、*B*、*C*、*D*构成的四边形为正方形．

(1)求*k*的值；(2)求点*A*的坐标．



[解](1)∵*B*(3，3)在双曲线上，∴*k*=3×3=9.

(2)过*D*点作*DM*⊥*x*轴于*M*，过*B*点作*BN*⊥*x*轴于*N*，则∠*DMA*=∠*ANB*=90°.∵*B*(3，3)，∴*BN*=*ON*=3.设*MD*=*a*，*OM*=*b*，∵*D*点在双曲线上，∴-*ab*=-4，即*ab*=4.

∵四边形*ABCD*是正方形，∴∠*DAB*=90°，*AD*=*AB*.

∴∠*DAM*+∠*BAN*=90°，

又由题意可知∠*MDA*+∠*DAM*=90°，

∴∠*ADM*=∠*BAN*.

在△*ADM*和△*BAN*中

∴△*ADM*≌△*BAN*(AAS)，

∴*AM*=*BN*=3，*AN*=*MD*=*a*，

∴*OA*=3-*a*，即*AM*=*b*+3-*a*=3，即*a*=*b*.

∵*ab*=4，∴*a*=*b*=2，∴*OA*=3-2=1.

即点*A*的坐标是(1，0).

**同步训练**

**一、填空题**

1．已知反比例函数*y*=-，比例系数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；当变量*x*取-3时的函数值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；当函数值*y*取-3时，变量*x*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

2．近视眼镜的度数*y*(单位：度)与镜片焦距*x*(单位：m)成反比例(即).已知200度近视眼镜的镜片焦距为0.5m，则*y*与*x*之间的函数解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.[解析]将*x*=0.5，*y*=200代入得*k*=100，则*y*与*x*之间的函数解析式为.

[答案]

3．已知反比例函数的图像经过点*P*(*a*+1，4)，则*a*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：-3

4．函数*y*=-当*x*>0时，*y*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_0，相应的图像在第\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限内，*y*随*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：<；四；增大

5．若反比例函数*y*=(2*m*-1)的图像在第二、四象限，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，函数的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：-1；

6．若点*P*1(-1，*m*)，*P*2(-2，*n*)在反比例函数的图像上，则*m*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*n*(填“>”“<”或“=”).

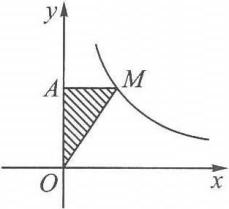
[解析]在反比例函数中，*k*>0，∴该函数图像的两支分别位于第一、第三象限，且在每一个象限内，*y*随*x*的增大而减小，又∵-2<-1<0，∴*m*<*n*.

[答案]<

7. 已知*P*1(*x*1，*y*1)，*P*2(*x*2，*y*2)是同一个反比例函数图像上的两点，若*x*2=*x*1+2，且则这个反比例函数的表达式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]设反比例函数的表达式为0)，因为所以*x*2=*x*1+因为*x*2=*x*1+2，所以解得*k*=4，所以反比例函数的表达式为

[答案]

8．如图所示，*M*为反比例函数的图像上的一点，*MA*⊥*y*轴，垂足为*A*，△*MAO*的面积为2，则*k*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]∵*MA*⊥*y*轴，∴*S*△*AOM*=即|*k*|=4.而*k*>0，∴*k*=4.

[答案]4

**二、选择题**

9．某玩具厂计划生产一种玩具熊猫，已知每个玩具熊猫的成本为*y*元，若该厂某月生产*x*个(*x*取正整数)，这个月的总成本为5000元，则*y*与*x*之间满足的函数表达式为( ).

A． B． C． D．

[解析]一个玩具熊猫的成本*y*(元)与月生产个数*x*的积就是该月的总成本，即*y*·*x*=5000，故选C项.

[答案]C

10．对于反比例函数下列说法正确的是( ).

A．图像经过点(1，-3) B．图像位于第二、第四象限

C．*x*>0时，*y*随*x*的增大而增大 D．*x*<0时，*y*随*x*的增大而减小

答案：D [提示]对于反比例函数当*x*=1时，*y*=3，故A项错误；因为*k*=3>0，所以反比例函数的图像的两支分别位于第一、第三象限，且在每一个象限内，*y*随*x*的增大而减小，故B、C项均错误，D项正确.

**三、解答题**

11．某地上年度电价为0.8元／千瓦时，年用电量为1亿千瓦时.本年度计划将电价调至0.55元～0.75元之间，经测算，若电价调至*x*元，则本年度新增用电量*y*(亿千瓦时)与(*x*-0.4)元成反比例.又当*x*=0.65时，*y*=0.8.求*y*与*x*之间的函数关系式.

答案：∵*y*与(*x*-0.4)成反比例，

设

把*x*=0.65，*y*=0.8代入上式，得即

12．已知反比例函数的表达式为分别根据下列条件求出字母*k*的取值范围.

(1)函数图像位于第一、三象限；

(2)在函数图像所在的每一个象限内，*y*随*x*的增大而增大.

答案：(1)根据题意知4-*k*>0，得*k*<4；

(2)由题意知4-*k*<0.即*k*>4.

**【探索创新】**

已知反比例函数(*k*≠0)，且在每个象限内*y*随着*x*的增大而增大，取图像上一点*M*向*x*轴作垂线，垂足为*N*，且*MN*长度为3，△*MON*的面积为8.

(1)求*M*点的坐标；

(2)求此反比例函数的解析式；

(3)设这图像上有一点*P*，过*P*点作*y*轴垂线，垂足为*Q*，当|*PQ*|=12时，求△*OPQ*的面积.

**答案：**(1)由于*S*△*MON*=|*MN*|·|*NO*|=8，则|*NO*|=或

(2)*y*=

(3)由题意，得或 .所以，*S*△*OPQ*==8

**走进中考**

1．(2017·上海中考)如果反比例函数*y*=（*k*是常数，*k*≠0）的图像经过点(2，3)，那么在这个函数图像所在的每个象限内，*y*的值随*x*的值增大而 .（填“增大”或“减小”）

答案：减小

2．(2016·上海中考)已知反比例函数（），如果在这个函数图像所在的每一个象限内，的值随着的值增大而减小，那么的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

**反比例函数练习题**

**一、精心选一选！（30分）**

1．下列函数中，图象经过点的反比例函数解析式是（ ）



A． B． C． D．



2．反比例函数（为常数，）的图象位于（　　）



Ａ．第一、二象限 Ｂ．第一、三象限 Ｃ．第二、四角限 Ｄ．第三、四象限

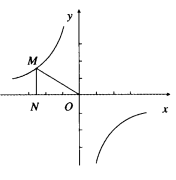


3．已知反比例函数y＝的图象位于第一、第三象限，则k的取值范围是（ ）．



（A）k＞2 （B） k≥2 （C）k≤2 （D） k＜2

4．反比例函数的图象如图所示，点*M*是该函数图象上一点，*MN*垂直于*x*轴，垂足是点*N*，如果S*△MON*＝2，则*k*的值为（ ）



(A)2 (B)-2 (C)4 (D)-4

5．对于反比例函数，下列说法不正确的是（ ）



A．点在它的图象上 B．它的图象在第一、三象限



C．当时，随的增大而增大 D．当时，随的增大而减小



6．反比例函数，当x＞0时，y随x的增大而增大，则m的值时（ ）



A、±1 B、小于的实数 C 、－1 D、1

*O*

*A*1

*A*2

*A*3

*P*1

*P*2

*P*3

*x*

*y*



7．如图，*P*1、*P*2、*P*3是双曲线上的三点，过这三点分别作*y*轴的垂线，得到三个三角形*P*1*A*1*O*、*P*2*A*2*O*、*P*3*A*3*O*，设它们的面积分别是*S*1、*S*2、*S*3，则（ ）。

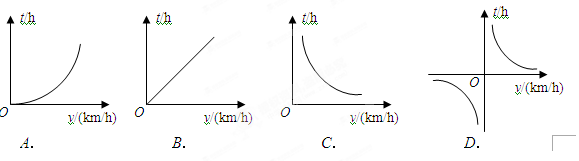
*A*、*S*1＜*S*2＜*S*3 *B*、*S*2＜*S*1＜*S*3 *C*、*S*3＜*S*1＜*S*2 *D*、*S*1=*S*2=*S*3

8．在同一直角坐标系中，函数与图象的交点个数为（　　）



A．3 B．2 C．1 D．0

9．已知甲、乙两地相距（km），汽车从甲地匀速行驶到乙地，则汽车行驶的时间（h）与行驶速度（km/h）的函数关系图象大致是（ ）



10．如图，直线y=mx与双曲线y=交于A、B两点，过点A作AM⊥x轴，垂足为M，连结BM,若=2，则k的值是（ ）



A．2 B、m-2 C、m D、4

11．在反比例函数(*k*<0)的图象上有两点*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，且>>0，则的值为（ ）

(A)正数 (B)负数 (C)非正数 (D)非负数

**二、细心填一填！（30分）**

11．写出一个图象在第一、三象限的反比例函数的解析式 ．

12．已知反比例函数的图象经过点P（a+1，4），则a=\_\_\_\_\_．



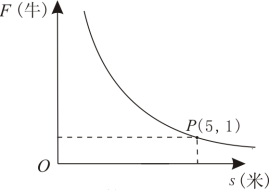
13．反比例函数图象上一个点的坐标是　　　　　　．



14．一个函数具有下列性质：①它的图像经过点（－1，1）；②它的图像在二、四象限内； ③在每个象限内，函数值*y*随自变量*x*的增大而增大．则这个函数的解析式可以为 ．



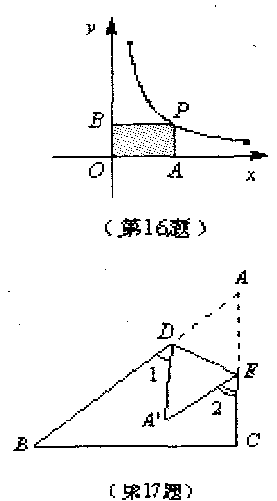
15．已知反比例函数的图象经过点（m，2）和（-2，3）则*m*的值为　　　　　　．15．；



16．在的三个顶点中，可能在反比例函数的图象上的点是 ．



17．在对物体做功一定的情况下，力*F*(牛)与此物体在力的方向上移动的距离*s*(米)成反比例函数关系，其图象如图所示，*P*(5，1)在图象上，则当力达到10牛时，物体在力的方向上移动的距离是 米．



18．已知点P在函数 (x＞0)的图象上，PA⊥x轴、PB⊥y轴，垂足分别为A、B，则矩形OAPB的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



19．已知直线与双曲线的一个交点*A*的坐标为（-1，-2）．则=\_\_\_\_\_；=\_\_\_\_；它们的另一个交点坐标是\_\_\_\_\_\_．

*O*

*y*

*x*

*M*

*N*

*l*

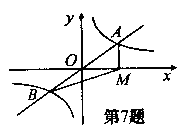


20．如图，过原点的直线*l*与反比例函数的图象交于*M*，*N*两点，根据图象猜想线段*MN*的长的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

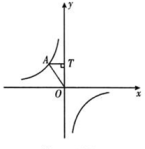


**三、用心解一解！（60分）**

21.在平面直角坐标系中，直线绕点顺时针旋转得到直线．直线与反比例函数的图象的一个交点为，试确定反比例函数的解析式．**（5分）**



22．如图，点A是反比例函数图象上的一点，自点A向y轴作垂线，垂足为T，已知S△AOT＝4，求此函数的表达式. **（5分）**



23.已知点P（2，2）在反比例函数（）的图象上，



（Ⅰ）当时，求的值；



（Ⅱ）当时，求的取值范围．**（7分）**



24．如图，已知双曲线（）经过矩形的边的中点，且四边形的面积为2，求k的值．**（7分）**

*y*

*x*

*O*

*F*

*A*

*B*

*E*

*C*



25．若一次函数y＝2x－1和反比例函数y＝的图象都经过点（1，1）．



（1）求反比例函数的解析式；

（2）已知点A在第三象限，且同时在两个函数的图象上，求点A的坐标；**（8分）**

26.已知点A（2，6）、B（3，4）在某个反比例函数的图象上.

（1）求此反比例函数的解析式；

（2）若直线与线段AB相交，求m的取值范围. **（8分）**



27.如图正方形OABC的面积为4，点O为坐标原点，点B在函数 的图象上，点P(m，n)是函数的图象上异于B的任意一点，过点P分别作x轴、y轴的垂线，垂足分别为E、F．



(1)设矩形OEPF的面积为Sl，判断Sl与点P的位置是否有关(不必说理由)．



(2)从矩形OEPF的面积中减去其与正方形OABC重合的面积，剩余面积记为S2，写出S2与m的函数关系，并标明m的取值范围．**（8分）**



A

B

C

O

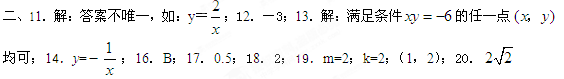
y

x

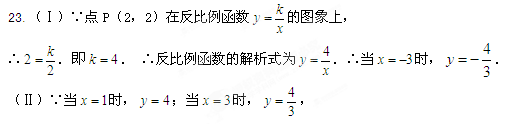
**参考答案：**一、1．B 2．C 3．A 4．D 5．C 6．C 7．D 8．D 9．C 10．A；



三、21．解：依题意得，直线的解析式为．因为在直线上，则． 　　　　即．又因为在的图象上，可求得．所以反比例函数的解析式为．



22．解：设所求反比例函数的表达式为，因为S△AOT＝，所以＝4，即，又因为图象在第二、四象限，因此，故此函数的表达式为；



又反比例函数在时值随值的增大而减小， ∴当时，的取值范围为．



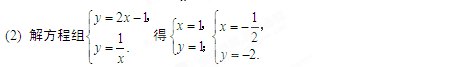
24.设*B*点的坐标为（2*a*，2*b*），则*E*点的坐标为（*a*，2*b*），*F*点的坐标为（2*a*，*b*），所以*k*=2*ab*.因为4*ab*－×2*ab* ×2=2，所以2*ab*=2.



**25．**(1) ∵反比例函数y**=**的图象经过点(1，1)，∴1**=** 解得k=2，



∴反比例函数的解析式为y=．



∵点A在第三象限，且同时在两个函数图象上， ∴A(，–2)．



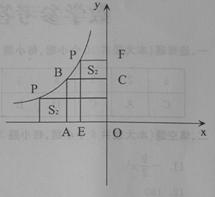
26.解：（1）设所求的反比例函数为，依题意得: 6 =，∴k=12． ∴反比例函数为．



（2） 设P（x，y）是线段AB上任一点，则有2≤x≤3，4≤y≤6．∵m = ， ∴≤m≤．



所以m的取值范围是≤m≤3．



**27.**(1) 没有关系；(2) 当P在B点上方时，；当P在B点下方时，



第4讲 反比例函数实际应用

**课前检测**

1.在下列函数中，不是*y*关于*x*的反比例函数的是( ).

答案：B

2.下列函数关系中，是反比例关系的有( )个

①互为倒数的两个数*y*和*x*之间的关系；

②某市的总面积为16780平方千米，人均占有的土地面积*S*平方千米与全市总人口*n*人之间的关系；

③梯形的面积为80平方分米，下底长是上底长的3倍，梯形的高*h*与梯形的上底*a*之间的关系；

④互为邻补角的两个角的度数*m*与*n*之间的关系；

⑤菱形的面积*S*一定时，两条对角线的长*a*和*b*之间的关系.

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

答案：C

3.以下说法正确的一共有( )个.

①已知点(1，-2)在反比例函数*y*=的图像上，则*k*=2；

②已知反比例函数*y*=的图像经过点*A*(-3，-6)，则这个反比例函数的解析式是*y*=；

③若反比例函数*y*=-的图像上有两点*A*(1，*y*1)、*B*(2，*y*2)，则*y*1<*y*2；

④若反比例函数*y*=的图像经过点(-3，-4)，那么函数的图像应在第一、三象限.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

答案：C

4.若反比例函数的图像在第二、四象限，则*m*的值是( ).

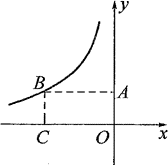
(A)-1或1 (B)小于的任意实数 (C)-1 (D)不能确定

答案：C

5.函数*y*=的图像经过点(-4，6)，则下列各点中在*y*=图像上的是( )

(A)(3，8) (B)(3，-8) (C)(-8，-3) (D)(-4，-6)

答案：B

6.如图，在直角坐标系中，点*A*是*y*轴正半轴上的一个定点，点*B*是双曲线*y*=(*x*<0)上的一个动点，当点*B*的横坐标逐渐增大时，△*OAB*的面积将会( ).

(A)逐渐增大 (B)不变

(C)逐渐减小 (D)先增大后减小

答案：C

7.已知反比例函数*y*=(*k*<0)的图像上有两点*A*(*x*1，*y*1)、*B*(*x*2，*y*2)，且*x*1<*x*2，则*y*1-*y*2的值是( ).

(A)正数 (B)负数 (C)非正数 (D)不能确定

答案：D

8.已知三角形的面积为4cm2，底边上的高*y*(cm)与底边*x*(cm)之间的函数关系式图像大致应为( ).

Image5

答案：B

9.在同一直角坐标平面内，如果直线*y*=*k*1*x*与双曲线*y*=有两个交点，那么*k*1和*k*2的关系一定是( ).

(A)*k*1<0，*k*2>0 (B)*k*1>0，*k*2<0 (C)*k*1、*k*2同号 (D)*k*1、*k*2异号

Image3答案：C

10.如图，*A*、*C*是函数*y*=的图像上的任意两点，过点*A*作*x*轴的垂线，垂足为*B*.过点*C*作*y*轴的垂线，垂足为*D*.记Rt△*AOB*的面积为*S*1，Rt△*COD*的面积为*S*2则( ).

(A)*S*1>*S*2 (B)*S*1<*S*2

(C)*S*1=*S*2 (D)*S*1与*S*2的大小关系不能确定

答案：C

**知识梳理**

**1.反比例函数与实际问题**

反比例函数在实际生活中有着广泛的应用.应用反比例函数解决实际问题的关键在于把实际问题转化为数学问题中的反比例函数.

**(1)生活中常见的实际问题中蕴含的反比例函数：**

①路程一定时，速度与时间的关系.

②工作量一定时，工作效率与工作时间的关系.

③圆柱体体积一定时，底面积与高的关系.

④电学中，电压一定时，电流与电阻的关系.

⑤压力一定时，压强与受力面积的关系.

⑥杠杆原理中阻力与阻力臂、动力与动力臂的关系.

⑦销售总收入不变，售价与销售数量的关系.

**(2)常见的题目类型**

①根据实际问题中的条件写出反比例函数关系式，并画出图像.

②根据实际问题中的图像求出函数关系式，进而解决问题.

**2.应用反比例函数解决实际问题的基本思路与方法**

应用反比例函数解决问题，首先要分析问题情景，建立函数模型，事实上，建立函数模型就是寻找一个能代表题中全部含义的相等关系，它与列方程解应用题的方法是一脉相承的.解题步骤如下：

(1)审：审清题意，找出题目的常量、变量，并理清常量与变量之间的关系.

(2)设：根据常量、变量之间的关系，设出函数关系式，待定系数用字母表示.

(3)列：由题目中的已知条件，列出方程，求出待定系数.

(4)写：写出函数关系式，并注意关系式中变量的取值范围.

(5)解：用函数关系式去解决实际问题.

[注意](1)设未知量要恰当.恰当地设未知量可以使运算简便，解题过程简单，计算准确率高，否则将会给解题带来不必要的麻烦.

(2)在实际问题中，反比例函数中的函数与自变量的取值不再是非零的实数，一般只能取正值，例如，在电流与电阻的关系式(*U*一定)中，*I*、*R*、*U*均取正数.

(3)求出问题的解，既要符合题目中的方程，还要符合问题的实际意义.

**[点睛]反比例函数应用，关系明确定系数；关系不明列等式，变形化为一般式.常涉及生活实践，几何图形跨学科；运用性质解问题，数形结合思路新.**

**3.反比例函数与其他知识的综合应用问题**

在很多实际问题中，往往涉及多种函数关系，需要综合运用各种函数的图像与性质去分析已知条件与所要面临实际问题之间的关系，准确把握题意，达到顺利解决问题的目的.

函数与其他知识，如：方程、不等式、几何等知识有着密切的联系.在很多问题中，不仅要利用函数的图像与性质去探讨问题，还要依据各方面的知识综合考查问题，并要学会运用数形结合、分类讨论等思想方法处理和解决问题.

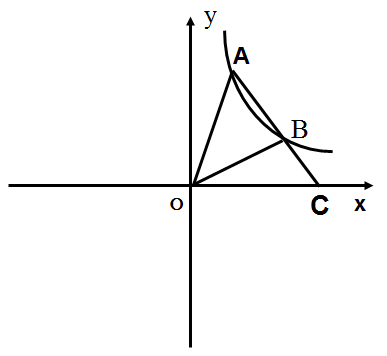
[注意](1)在一个问题中，两个变量*x*、*y*若满足(*k*为常数，*k*≠0)，则称*y*是*x*的反比例函数.实际生活中有很多这样的反比例函数模型.例如：压强与受力面积(压力一定)：长方形的长与宽(面积一定)；速度与时间(路程一定)等.

(2)利用反比例函数的图像和性质，既能直观反映两个变量之间的变化规律，又能直接找出所要求的函数值或自变量的值.当然，由于实际问题的原因，反比例函数的图像不再是关于原点对称的双曲线.一般为第一象限的一个分支(即中，*k*>0，*x*>0).

(3)利用函数性质，确定最佳方案或最佳值背景是运用函数解决实际问题中常见的情形.

**典型解析**

**一、在面积中的应用**

**例1：**如图，已知，*A*，*B*是双曲线(*k*>0)上的两点，

(1)若*A*(2，3)，求*k*的值；

(2)在(1)的条件下，若点*B*的横坐标为3，连接*OA*，*OB*，*AB*，求△*OAB*的面积.

答案：(1)*k*=6；(2).

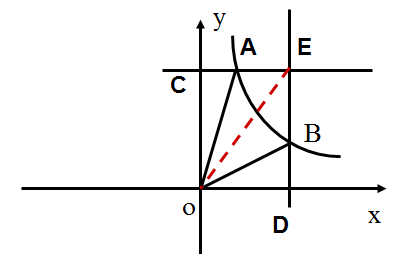
**【变式训练】**

如图，在反比例函数*y*=(*x*>0)的图像上，有点*P*1、*P*2、*P*3、*P*4，它们的横坐标依次为1、2、3、4，分别过这些点作*x*轴与*y*轴的垂线，图中所构成的阴影部分的面积从左到右依次为*S*1、*S*2、*S*3.求*S*1+*S*2+*S*3的值.

Image2

答案：

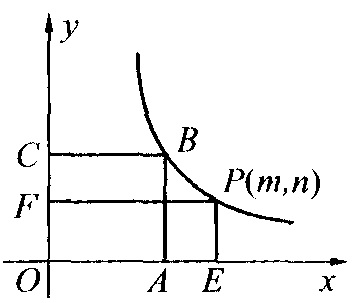
**例2：**若*A*(*m*，*n*)是反比例函数图像上的一动点，其中0<*m*<3，点*B*的坐标(3，2)，过点*A*作直线*AC*∥*x*轴，交*y*轴于点*C*；过点*B*作直线*BD*∥*y*轴交*x*轴于点*D*，交直线*AC*于点*E*，当四边形*OBEA*的面积为6时，请判断线段*AC*与*AE*的大小关系，并说明理由.



答案：相等

**【变式训练】**

如图，已知正方形*OABC*的面积为9，点*O*为坐标原点，点*A*在*x*轴上，点*C*在*y*轴上，点*B*在函数(*k*>0，*x*>0)的图像上，点*P*(*m*，*n*)是函数(*k*>0，*x*>0)图像上任意一点，过点*P*分别作*x*轴、*y*轴的垂线，垂足分别为*E*，*F*，若设矩形*OEPF*和正方形*OABC*不重合部分的面积为*S*，写出*S*关于*m*的函数关系式．



答案：当*m*≥3时，*S*=9-；当0<*m*<3时，*S*=9-3*m*.

**一个性质：反比例函数的面积不变性**

**两种思想：分类讨论和数形结合**

**二、在速度和工程中的应用**

**例3：**码头工人以每天30吨的速度往一艘轮船上装载货物，把轮船装载完毕恰好用了8天时间.

(1)这批货物的总量是多少吨？

(2)轮船到达目的地后开始卸货，卸货速度*v*(单位：吨/天)与卸货时间*t*(单位：天)之间有怎样的函数关系?

(3)若工人以每天40吨的速度卸货，需要几天卸完？

(4)由于遇到紧急情况，船上的货物必须在不超过5天内卸载完毕，那么平均每天至少要卸多少吨货物?

(5)若工人每天卸货在40—48吨之间，那么卸货时间范围是多少？

答案：(1)240；(2)；(3)6；(4)48；(5)5≤*t*≤6.

**例4：**一辆汽车往返于甲，乙两地之间，如果汽车以50千米/小时的平均速度从甲地出发，则经过6小时可以到达乙地.

(1)甲乙两地相距多少千米?

(2)如果汽车把速度提高到*v*千米/小时，那么从甲地到乙地所用时间*t*(小时)将怎样变化?

(3)写出*t*与*v*之间的函数关系.

(4)因某种原因，这辆汽车需在5小时内从甲地到达乙地，则此时的汽车的平均速度至少应是多少?

(5)汽车按每小时60千米的速度行驶2小时时，司机接到通知必须在之后2小时之内到达目的地.之后每小时至少加速多少，才能准时到达？

答案：(1)300；(2)变小/减少；(3)；(4)60km/h；(5)30km/h.

**三、在物理中的应用**

在物理学中，有很多量之间的变化是反比例函数的关系，因此，我们可以借助于反比例函数的图像和性质解决一些物理学中的问题，这也称为跨学科应用.

**例5：**在某一电路中，保持电压不变，电流*I*(安培)和电阻*R*(欧姆)成反比例，当电阻*R*＝5欧姆时，电流*I*＝2安培．

(1)求*I*与*R*之间的函数关系式；(2)当电流*I*＝0.5时，求电阻*R*的值．

(1)解：设*I*＝  ∵*R*＝5，*I*＝2，于是 =2×5＝10，所以*U*＝10，∴*I*＝．

(2)当*I*＝0.5时，*R*＝=＝20(欧姆)．

点评：反比例函数与现实生活联系非常紧密，特别是为讨论物理中的一些量之间的关系打下了良好的基础.用数学模型的解释物理量之间的关系浅显易懂，同时不仅要注意跨学科间的综合，而本学科知识间的整合也尤为重要，例如方程、不等式、函数之间的不可分割的关系．

**例6：**近视眼镜的度数*y*(度)与焦距*x*(m)成反比例，已知400度近视眼镜镜片的焦距为0.25m．

(1)试求眼镜度数*y*与镜片焦距*x*之间的函数关系式；(2)求1000度近视眼镜镜片的焦距．

分析：把实际问题转化为求反比例函数的解析式的问题．

解：(1)设*y*=，把*x*=0.25，*y*=400代入，得400=，

所以，*k*=400×0.25=100，即所求的函数关系式为*y*=．

(2)当*y*=1000时，1000=，解得*x*=0.1m．

点评：生活中处处有数学.用反比例函数去研究两个物理量之间的关系是在物理学中最常见的，因此同学们要学好物理，首先要打好数学基础，才能促进你对物理知识的理解和探索.

**四、在经济预算中的应用**

**例7：**某地上年度电价为0.8元，年用电量为1亿度，本年度计划将电价调至0.55～0.75元之间，经测算，若电价调至*x*元，则本年度新增用电量*y*(亿度)与(*x*－0.4)元成反比例.又当*x*＝0.65元时，*y*＝0.8.

(1)求*y*与*x*之间的函数关系式；

(2)若每度电的成本价0.3元，电价调至0.6元，请你预算一下本年度电力部门的纯收入多少?

解：(1)∵*y*与*x*－0.4成反比例，∴设*y*＝ (*k*≠0)．

把*x*＝0.65，*y*＝0.8代入

*y*＝，得0.8＝， 解得*k*＝0.2，∴*y*＝

 ∴*y*与*x*之间的函数关系为*y*＝

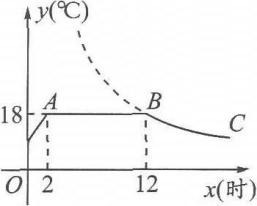
(2)根据题意，本年度电力部门的纯收入为：

(0.6－0.3)(1＋*y*)＝0.3×2＝0.6(亿元)

答：本年度的纯收入为0.6亿元.

点评：在生活中各部门，经常遇到经济预算等问题，有时关系到因素之间是反比例函数关系，对于此类问题我们往往由题目提供的信息得到变量之间的函数关系式，进而用函数关系式解决一个具体问题．

**五、在生活中的应用**

**例8：**我市某蔬菜生产基地在气温较低时，用装有恒温系统的大棚栽培一种在自然光照且温度为18℃的条件下生长最快的新品种.图是某天恒温系统从开启到关闭及关闭后，大棚内温度*y*(℃)随时间*x*(小时)变化的函数图像，其中*BC*段是双曲线的一部分.请根据图中信息解答下列问题：

(1)恒温系统在这天保持大棚内温度18℃的时间有多少小时？

(2)求*k*的值；

(3)当*x*=16时，大棚内的温度约为多少度？

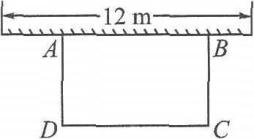
[解](1)由图可知，恒温系统在这天保持大棚温度18℃的时间为10小时.

(2)∵点*B*(12，18)在双曲线上解得*k*=216.

(3)当*x*=16时

即当*x*=16时，大棚内的温度约为13.5℃.

**例9：**如图，科技小组准备用材料围建一个面积为60m2的矩形科技园*ABCD*，其中一边*AB*靠墙，墙长为12m.设*AD*的长为*x* m，*DC*的长为*y* m.

(1)求*y*与*x*之间的函数关系式；

(2)若围成的矩形科技园*ABCD*的三边材料总长不超过26m，材料*AD*和*DC*的长都是整米数，求出满足条件的所有围建方案.

[解](1)由题意，得*xy*=60，即.

∴所求的函数关系式为

且*x*，*y*都是正整数，

∴*x*可取1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60.

又∵2*x*+*y*≤26，0<*y*≤12，

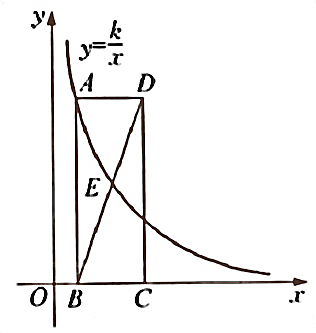
∴符合条件的有：当*x*=5时，*y*=12；当*x*=6时，*y*=10；当*x*=10时，*y*=6.

答：满足条件的围建方案有三种，分别为：*AD*=5m，*DC*=12m或*AD*=6m，*DC*=10m或*AD*=10m，*DC*=6m.

**六、其他应用**

**例10：**如图所示，点(1，3)在函数的图像上，长方形*ABCD*的边*BC*在*x*轴上，*E*是对角线*BD*的中点，函数*y*=的图像经过点*A*、*E*两点，点*E*的横坐标为*m*.

(1)求*k*的值；(2)求点*C*的横坐标(用*m*表示)；(3)当∠*ABD*=45°时，求*m*的值.



答案：(1)因为点(1，3)在函数*y*=(*k*>0)的图像上，所以，即*k*=3

(2)因为点*E*在函数的图像上，所以*E*点的纵坐标为，即点*E*的坐标

设*B*点的坐标(*b*，0)，所以*A*点的坐标为

因为*A*点在函数的图像上，所以

所以*C*点的横坐标为*OB*+*BC*=*b*+2(*m*-*b*)=

(3)当∠*ABD*=45°时，|*AB*|=|*AD*|，所以所以*m*2=6，又因为*m*>0，所以*m*=√6

**同步训练**

**一、填空题**

1.如图，面积为3的矩形*OABC*的一个顶点*B*在反比例函数*y*=的图像上，另三点在坐标轴上，则*k*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

Image4

答案：-3

2.小涵同学为了扩大自己的课外阅读量，到新华书店买了一本800页的《红楼梦》，他打算每天读*m*页，*n*天读完这部书，则*m*与*n*之间的函数关系式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：[提示]由每天读的页数×天数=800列出关系式.

3.京沈高速公路全长658km，汽车沿京沈高速公路从沈阳驶往北京，则汽车行完全程所需时间*t*(h)与行驶的平均速度*v*(km/h)之间的函数关系式为：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

4.小明家用购电卡买了1000度电，那么这些电能够使用的天数*y*与平均每天用电度数*x*之间的函数关系式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，如果平均每天用5度，这些电可以用\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_天；如果这些电想用250天，那么平均每天用电\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_度.

答案：；200；4.

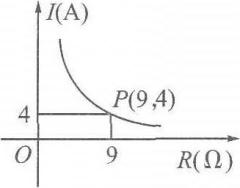
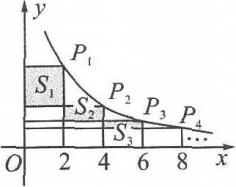
5.某种蓄电池的电压为定值，使用此电源时，电流*I*(A)与可变电阻*R*(Ω)之间的函数关系如图所示，当用电器的电流为10A时，用电器的可变电阻为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：3.6Ω[提示]设电池的电压为*U*(V)，则*U*=*IR*.即，当*I*=10A时，.

6.如图，在函数的图像上有点*P*1，*P*2，*P*3，…，*Pn*，*Pn*+1，点*P*1的横坐标为2，且后面每个点的横坐标与它前面相邻点的横坐标的差都是2，过点*P*1，*P*2，*P*3，…，*Pn*，*Pn*+1分别作*x*轴、*y*轴的垂线段，构成若干个矩形.将图中阴影部分的面积从左至右依次记为*S*1，*S*2，*S*3，…，*Sn*，则*S*1=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*Sn*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.(用含*n*的代数式表示)

[解析]当*x*=2时，*P*1的纵坐标为4，当*x*=4时，*P*2的纵坐标为2，当*x*=6时，*P*3的纵坐标为当*x*=8时，*P*4的纵坐标为1，当*x*=10时，*P*5的纵坐标为

[答案]

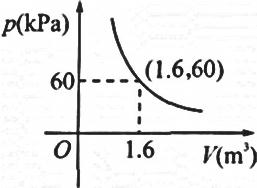
 

第5题图 第6题图

**二、选择题**

7.如图，双曲线*y*=(*k*>0)经过长方形*OABC*的边*BC*的中点*E*，交*AB*于点*D*.若梯形*ODBC*的面积为3，则双曲线的解析式为( ).

答案：B

Image3 

第7题图 第8题图

8.某气球内充满一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的气压*p*(kPa)是气体体积*V*(m3)的反比例函数，其图像如图，当气球内的气压大于120kPa时，气球将爆炸，为了安全起见，气球的体积应( ).

A.不小于 B.小于 C.不小于 D.小于

答案：C [提示]设反比例函数表达式当*p*≤120时.

**三、解答题**

9.将油箱注满*k*升油后，轿车可行的总路程*s*(单位：千米)与平均耗油量*a*(单位：升/千米)之间满足反比例函数关系(*k*是常数，*k*≠0).已知某轿车油箱注满油后，以平均耗油量为每千米0.1升的速度行驶，可行驶700千米.

(1)求该轿车可行驶的总路程*s*与平均耗油量*a*之间的函数关系式；

(2)当平均耗油量为0.08升/千米时，该轿车可以行驶多少千米？

答案：(1)将*a*=0.1，*s*=700代入反比例函数关系式*s*=中，解得*k*=*sa*=70，所以函数关系式为.

(2)将*a*=0.08代入得故该轿车可以行驶875千米.

10.心理学家研究发现，一般情况下，学生的注意力随着教师讲课时间的变化而变化，讲课开始时，学生的注意力逐步增强，中间有一段时间学生注意力保持较为理想的状态，随后学生的注意力开始分散，经过实验分析可知，学生注意力*y*随时间*t*的变化规律有如下关系式：

(1)讲课开始后第5分钟时与讲课后第25分钟时比较，何时学生的注意力更集中？

(2)讲课开始后多少分钟，学生的注意力最集中？能持续多少分钟？

(3)一道数学难题，需讲解19分钟，为了效果较好，要求学生的注意力最低达到180，则经过适当的安排，老师能否在学生的注意力达到所需状态下讲解完这道题目？

答案：(1)当*t*=5时，*y*=24×5=120；当*t*=25时192.

∵192>120，∴第25分钟时比第5分钟时学生注意力更集中.

(2)在0<*t*≤10时，当*t*=10时，*y*最大=240；在10<*t*<20时，*y*恒为240；在20≤*t*≤40时，当*t*=20时，*y*最大=240.

故讲课开始后10分钟时，学生的注意力最集中，持续20-10=10(分钟).

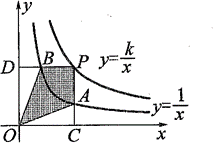
(3)当0<*t*≤10时，令*y*=24*t*=180

当20≤*t*≤40时，令

注意力在180以上的持续时间为：19.

故老师能在学生注意力达到所需状态下讲解完这道题目.

**【探索创新】**

两个反比例函数*y*=和*y*=在第一象限内的图像如图所示，点*P*在*y*=的图像上，*PC*⊥*x*轴于点*C*，交*y*=的图像于点*A*，*PD*⊥*y*轴于点*D*，交*y*=的图像于点*B*，当点*P*在*y*=的图像上运动时，以下结论：

①△*ODB*与△*OCA*的面积相等；

②四边形*PAOB*的面积不会发生变化；

③*PA*与*PB*始终相等；

④当点*A*是*PC*的中点时，点*B*一定是*PD*的中点.

其中一定正确的是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(把你认为正确结论的序号都填上)，并证明.

答案：①②④

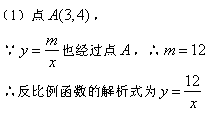
**走进中考**

(2015·上海中考)已知：如图，在平面直角坐标系*xOy*中，正比例函数*y*＝*x*的图像经过点*A*，点*A*的纵坐标为4，反比例函数*y*＝的图像也经过点*A*，第一象限内的点*B*在这个反比例函数的图像上，过点*B*作*BC*∥*x*轴，交*y*轴于点*C*，且*AC*＝*AB*．

求：(1)这个反比例函数的解析式； (2)直线*AB*的表达式．



【解析】







**第10讲 正比例函数和反比例函数**

**知识梳理**

**正、反比例函数的解析式、定义域、图像、性质**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **函数** | **正比例函数** | **反比例函数** |
| 解析式 | *y*=*kx*(*k*≠0) | *y*=(*k*≠0) |
| 定义域 |  |  |
| 图像 | ***O***        ***O***    经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_与\_\_\_\_\_\_\_\_\_两点的直线 | ***O***        ***O***    经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_与\_\_\_\_\_\_\_\_\_两点的双曲线 |
| 经过  象限 | 当*k*>0时，图像经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限；  当*k*<0时，图像经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限. | 当\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，图像经过一、三象限；  当\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，图像经过二、四象限. |
| 增减性 | 当\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随着*x*的增大而增大；  当\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随着*x*的增大而减小. | 当*k*>0时，在每个象限内，*y*随着*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_；  当*k*<0时，在每个象限内，*y*随着*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_. |

**典型解析**

**一、变量与函数**

**例1：**下列各式中，能表示*y*是*x*的函数的有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个．

①3*x*-2*y*=0； ②*y*=； ③ ④*x*=|*y*|； ⑤*y*=*x*； ⑥*y*=|*x*|．

规范解答

对于①②⑤⑥，当*x*确定时，*y*随之唯一确定，所以①②⑤⑥能表示*y*是*x*的函数；对于③④，对于每一个确定的*x*的值，*y*并非都有唯一确定的值与其对应，不满足函数的概念，所以③④中的*y*不是*x*的函数，本题的答案为4个．

解后反思

一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量*x*与*y*，并且对于*x*的每一个确定的值，*y*都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说*x*是自变量，*y*是*x*的函数．初步理解函数的概念：(1)两个变量相互联系，一个变量发生变化时另一个变量也随之变化；(2)函数与自变量之间是单值对应关系，自变量的值确定后，函数值是唯一确定的．认识函数概念，关键是认识到变量之间的单值对应关系．当自变量取定一个值时，单值对应包含两重含义：(1)另一个量有对应值；(2)对应值只有一个．

**例2：**求下列函数的定义域：

(1) (2)

(3) (4)

(5).

答案：(1)*x*≥1且*x*≠5；(2)*x*≤-3或*x*≥3且*x*≠5；(3)*x*≠0且*x*≠-1且*x*≠；(4)*x*≥-1且*x*≠2；(5)*x*≥-3且*x*≠-1且*x*≠1

**二、正比例函数和反比例函数的定义**

**例3：**①如果是正比例函数，那么*n*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

②若是反比例函数，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：(1)2；(2)3

**【变式训练】**

1．简答：若*x*、*y*是变量，

(1)已知*y*=-(*a*+2)*x*是正比例函数，求*a*的值；

(2)已知是正比例函数，求*m*的值；

(3)已知正比例函数*f*(*x*)满足*f*(2)=，求此函数解析式及*f*(-1.5)的值；

(4)已知正比例函数*y*=(2-3*m*)*x*，如果自变量*x*的值增加3时，函数*y*的值增加6，求这个函数的解析式；

(5)若函数*y*=(12-3*m*2)*x*2+(2-*m*)*x*是正比例函数，求*m*的值．

答案：(1)*a*≠-2；(2)*m*=-18(4)*y*=2*x*；(5)*m*=-2

2．简答：若*x*、*y*是变量．

(1)已知是反比例函数，求*a*的取值范围；

(2)已知是反比例函数，求*m*的值；

(3)已知反比例函数*f*(*x*)满足*f*()=求此函数解析式及*f*(5)的值；

(4)若函数*y*=(2*m*+6)*x*-1是反比例函数，求*m*的取值范围．

答案：(1)*a*≠3且*a*≠1；(2)*m*=2；(3)；(4)*m*≠-3

**三、确定函数解析式**

**条件：**已知两个变量的一对对应值，确定函数解析式；

**类型：①文字语言：**当*x*=××，*y*=××；

**②文字语言：**已知函数图像经过一点*A*(×，×)；

**③图形语言：**已知函数图像，及图像上的明确点*A*(×，×)；

**④表格语言：**已知反映两个变量关系的表格．

**例4：**①已知*y*与*x*成反比例，并且当*x*＝2时，*y*＝-1；那么当*y*＝时，*x*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：-4

②正比例函数的图像过点(6，2)，那么函数解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

③已知反比例函数与正比例函数*y*=2*x*的图像都经过点*A*(*a*，-2)，则此反比例函数的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

④如图所示，反比例函数的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*a*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

⑤在平面直角坐标系内，从反比例函数(*k*＜0)的图像上的一点分别作*x*、*y*轴的垂线段，与*x*、*y*轴所围成的矩形面积是9，那么这个函数解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

⑥某厂从2001年起开始投入技术改进资金，经技术改进后，其产品的生产成本不断降低，具体数据如下表：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 年度 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 |
| 投入技改资金*x*(万元) | 2.5 | 3 | 4 | 4.5 |
| 产品成本*y*(万元／件) | 7.2 | 6 | 4.5 | 4 |

(1)请认真分析表中数据，哪种函数能表示其变化规律，为什么？求出函数的解析式；

(2)按照这种变化规律，若2005年已投入技改资金5万元．

①预计生产成本每件比2004年降低多少万元？

②如果打算在2005年把每件产品成本降低到3.2万元，则还需投入技改资金多少万元(结果精确到0.01万元)？

答案：(1)反比例函数；；(2)①0.4万元；②5.63万元.

**四、根据图像的位置或函数增减性，确定比例系数中的字母的值或取值范围**

**例5：**(1)若正比例函数*y*=(3-2*m*)*x*的图像经过第二、四象限，则*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

(2)若反比例函数的图像经过二、四象限，则*k*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：0

(3)已知函数*y*=，当*x*<0时，*y*随*x*的增大而减小，那么*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

(4)若反比例函数在每一个象限内，*y*随*x*的增大而增大，则*m*＝\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：-2

(5)在同一直角坐标平面内，如果直线*y*=*k*1*x*与双曲线*y*=没有交点，那么*k*1和*k*2的*x*关系一定是( )．

(A)*k*1<0，*k*2>0 (B)*k*1>0，*k*2<0 (C)*k*1、*k*2同号 (D)*k*1、*k*2异号

答案：D

(6)已知*A*(-1，*y*1)，*B*(2，*y*2)两点在双曲线上，且*y*1>*y*2，则*m*的取值范围是( )．

A．*m*>0 B．*m*<0 C． D．

答案：D[提示]因为点*A*(-1，*y*1)的横坐标小于0，点*B*(2，*y*2)的横坐标大于0，且*y*1>*y*2，所以点*A*、*B*分别在第二、四象限，所以3+2*m*<0，解得

(7)若直线经过原点，且*y*的值随*x*的增大而减小，则*k\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*．

答案：*k*=0

**五、根据函数增减性确定图像位置，反过来，根据图像位置确定函数增减性**

**例6：**(1)正比例函数*y*=*kx*(*k*≠0)当图像在第\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限时，*y*随*x*的增大而增大．

答案：一、三

(2)反比例函数(*k*≠0)当随*x*的减小而增大时，图像在第\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限．

答案：一、三

(3)反比例函数的图像在\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限，在每个象限内，*y*随*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：一、三；减小

(4)在反比例函数图像上有三点(*x*1，*y*1)，(*x*2，*y*2)，(*x*3，*y*3)，若*x*1>*x*2>0>*x*3，则下列各式正确的是( )．

(A)*y*3>*y*1>*y*2 (B)*y*3>*y*2>*y*1 (C)*y*1>*y*2>*y*3 (D)*y*1>*y*3>*y*2

答案：A

(5)若点(-2，*y*1)，(-1，*y*2)，(1，*y*3)都在反比例函数图像上，则下列关系正确的是( )．

(A)*y*1>*y*2>*y*3 (B)*y*2>*y*1>*y*3 (C)*y*3>*y*1>*y*2 (D)*y*3>*y*2>*y*1

答案：C

**六、正、反比例函数的综合应用**

**例7：**(1)在同一直角坐标平面内，如果直线*y*=*k*1*x*与双曲线*y*=有两个交点，那么*k*1和*k*2的关系一定是( )．

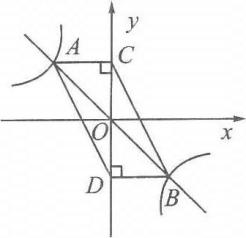
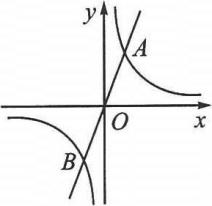
(A)*k*1<0，*k*2>0 (B)*k*1>0，*k*2<0 (C)*k*1、*k*2同号 (D)*k*1、*k*2异号

答案：C

(2)如图，函数*y*=-*x*与函数的图像相交于*A*，*B*两点，过*A*，*B*两点分别作*y*轴的垂线，垂足分别为点*C*，*D*，则四边形*ACBD*的面积为( )．

A．2 B．4 C．6 D．8

答案：D[提示]∵过函数的图像上*A*，*B*两点分别作*y*轴的垂线，垂足分别为点*C*，*D*，∴*S*△*AOC*=*S*△*ODB*=又∵*OC*=*OD*，*AC*=*BD*，∴*S*△*AOC*=*S*△*ODA*=*S*△*ODB*=*S*△*OBC*=2，∴四边形*ABCD*的面积为*S*△*AOC*+*S*△*ODA*+*S*△*ODB*+*S*△*OBC*=4×2=8．

第(2)题图 第(3)题图

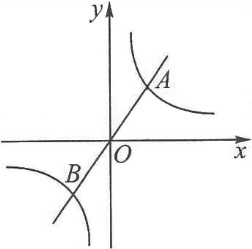
(3)如图，直线*y*=*kx*(*k*>0)与双曲线交于*A*、*B*两点，若*A*、*B*两点的坐标分别为*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，则*x*1*y*2+*x*2*y*1的值为( )．

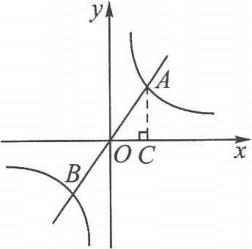
A．-8 B．4 C．-4 D．0

答案：C[提示]依题意知*A*、*B*关于原点对称，*y*2=-*y*1，*x*2=-*x*1，∴*x*1*y*2+*x*2*y*1=-2*x*1*y*1=-4．

**例8：**如图，直线*y*=*mx*与双曲线*y*=相交于*A*、*B*两点，*A*点的坐标为(1，2)．

(1)求反比例函数的解析式；(2)根据图像直接写出当时，*x*的取值范围；

(3)计算线段*AB*的长．

[解析](1)将*A*(1，2)代入即可求得反比例函数解析式．(2)由直线*y*=*mx*与双曲线的特点可知点*A*、*B*关于原点*O*对称．从而可知*B*(-1，-2)，进而可求出*x*的取值范围．(3)由点*A*的坐标求出线段*OA*的长，利用*AB*=2*OA*可求线段*AB*的长，或利用点*A*、*B*的坐标直接求出线段*AB*的长．

[解](1)把*A*(1，2)代入中，得*k*=2．∴反比例函数的解析式为．

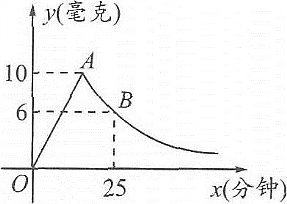
(2)-1<*x*<0或*x*>1．

(3)过点*A*作*AC*⊥*x*轴，垂足为点*C*．

∵*A*(1，2)，∴*AC*=2，*OC*=1．

由双曲线的对称性得*AB*=2*OA*=2．

**例9：**据媒体报道，近期“手足口病”可能进入发病高峰期，某校根据《学校卫生工作条例》，为预防“手足口病”，对教室进行“熏药消毒”．已知药物在燃烧释放过程中，室内空气中每立方米含药量*y*(毫克)与燃烧时间*x*(分钟)之间的关系如图所示(即图中线段*OA*和双曲线在*A*点及其右侧的部分)，根据图像所示信息，解答下列问题：

(1)写出从药物释放开始，*y*与*x*之间的函数关系式及自变量的取值范围；

(2)据测定，当空气中每立方米的含药量低于2毫克时，对人体无毒害作用，那么从消毒开始，至少在多长时间内，师生不能进入教室？

[解析](1)分两段求，先求反比例函数解析式，再求正比例函数解析式；(2)直接算出在反比例函数中当*y*=2时*x*的值即可．

[解](1)设反比例函数解析式为

将(25，6)代入解析式得，*k*=25×6=150．

则函数解析式为

将*y*=10代入解析式得

故*A*(15，10)，

设正比例函数解析式为*y*=*nx*，

将*A*(15，10)代入得

则正比例函数解析式为

∴75-3=72(分钟)．

答：从药物释放开始，师生至少在72分钟内不能进入教室．

[方法归纳]本题是一次函数和反比例函数所构成的分段函数，并进一步利用反比例函数解决实际问题，解决这类问题的关键是审清题目，理清步骤：先根据点的坐标确定解析式，再根据方程或不等式解决实际问题．

**同步训练**

**一、填空题**

1．函数中，自变量*x*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

[解析]由得*x*≤2且*x*≠-1．

[答案]*x*≤2且*x*≠-1

2．已知*f*(*x*)=3*x*2-2*x*-1，若*f*(*x*)=0，则*x*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：或1

3.已知直角三角形的斜边长为20，则一条直角边*y*关于另一条直角边*x*的函数关系式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

4．已知函数*y*=(3*k*-6)*x*，如果*y*随*x*增大而减小，那么*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*k*<2

5．函数的图像是双曲线，且图像在二、四象限，则=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

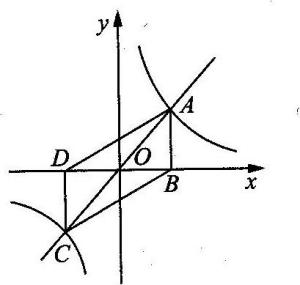
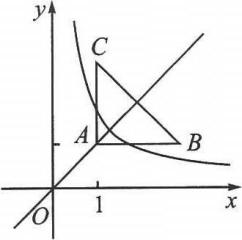
答案：-1

6．设有反比例函数为其图像上的两点，若*x*1<0<*x*2时，*y*1>*y*2，则*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*k*<-1

7．正比例函数*y*=*x*与反比例函数的图像相交于*A*，*C*两点，*AB*⊥*x*轴于*B*，*CD*⊥*x*轴于*D*，如图所示，则四边形*ABCD*的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：2

第7题图 第8题图

8．如图所示，等腰直角三角形*ABC*位于第一象限，*AB*=*AC*=2，直角顶点*A*在直线*y*=*x*上，其中*A*点的横坐标为1，且两条直角边*AB*、*AC*分别平行于*x*轴、*y*轴，若双曲线与△*ABC*有交点，则*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：1≤*k*≤4[提示]当双曲线经过点*A*时，*k*=|*x*|=1，当双曲线经过*BC*边中点时，易求出*BC*中点为(2，2)，所以*k*=2×2=4，因而1≤*k*≤4．

**二、选择题**

9．如图，在同一坐标系内，已知函数*y*=*k*1*x*与函数*y*=*k*2*x*，满足*k*1<0<*k*2，则*y*=*k*1*x*与*y*=*k*2*x*的图像大致为( )．

Image2

答案：B

10．对于反比例函数下列说法不正确的是( )．

(A)它的图像分布在第一、三象限 (B)点(*k*，*k*)在它的图像上

(C)它的图像是中心对称图形 (D)*y*随*x*的增大而增大

答案：D

**三、解答题**

11．(1)若正比例函数*y*=*mx*(*m*≠0)和反比例函数*y*=(*n*≠0)的图像有一个交点为点(2，3)，①求*m*与*n*的值；②求另一个交点的坐标；

(2)已知反比例函数*y*=(*k*≠0)与正比例函数*y*=*x*的图像有交点，求*k*的取值范围．

答案：(1)①*m*=，*n*=6；②(-2，-3)；(2)*k*>0

12．已知：如图，点*P*是一个反比例函数与正比例函数*y*=-2*x*的图像的交点，*PQ*垂直于*x*轴，垂足*Q*的坐标为(2，0)．

(1)求这个反比例函数的解析式．

(2)如果点*M*在这个反比例函数的图像上，且△*MPQ*的面积为6，求点*M*的坐标．

*O*

*Q*

*x*

*P*

*y*

答案：(1)*y*=；(2)(5，-)或(-1，8)

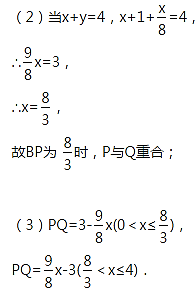
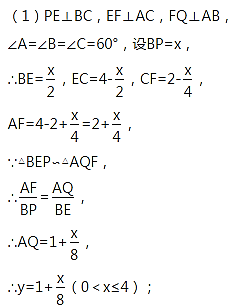
**【探索创新】**

如图，等边三角形*ABC*中，*AB*=4，点*P*是*AB*上的一个动点(点*P*可以与点*A*重合，但不与点*B*重合)，过点*P*作*PE*⊥*BC*，垂足为*E*，过点*E*作*EF*⊥*AC*，垂足为*F*，过点*F*作*FQ*⊥*AB*，垂足为*Q*，设*BP*=*x*，*AQ*=*y*．

(1)写出*y*与*x*之间的函数关系式及自变量的取值范围；

(2)当*BP*的长等于多少时，点*P*与点*Q*重合；

(3)用*x*的代数式表示*PQ*的长(不必写出解题过程)．



第5讲 正比例函数和反比例函数单元测试

(测试时间：60分钟 满分：100分)

姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 成绩：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**一、填空题(每题2分，共30分)**

1．函数*y*=2*x*-1是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_函数；反比例函数的一般表达式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，图像是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

2．函数*y*=的定义域是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

3．当长方形的面积为一固定值时，长方形的长和宽成\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_关系．

4．若点(*a*，3)在函数*y*=的图像上，那么*a*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

5．函数表示法有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_三种．

6．已知*f*(*x*)=那么*f*(6)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

7．如果2*x*+5*y*=－7，用*x*表示*y*是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

8．如果*x*与*y*成正比例，*y*与*z*成反比例，那么*x*与*z*成\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_关系．

9．已知*y*+1与*x*成反比例，当*x*=3时，*y*=－4，那么*y*与*x*的函数关系式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

10．如果*y*=(*m*+2)*x*+(*n*－3)是正比例函数，且图像经过点(2，6)，那么*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*n*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

11．对于任何实数*n*，点*P*(*n*+1，*n*)一定不在第\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限．

12．若正比例函数*y*=(*k*+1)*x*的图像经过二、四象限，则反比例函数*y*=的图像在\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限内．

13．正比例函数*y*=*kx*经过点(－1，2)，那么*y*随着*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

14．已知正比例函数*y*=*kx*的图像经过点(3，1)和(6，*m*)，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

15．正比例函数的图像经过二、四象限，点*A*(*a*，1)、*B*(－1，*b*)在图像上，则*a*与*b*的大小关系是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**二、选择题(每题3分，共15分)**

16．下列函数中是正比例函数的是 ( )

(A)*y*=6*x*-1 (B)*y*= (C)*y*= (D)*y*=2*x*(*x*－1)

17．函数*y*=的自变量*x*的取值范围是 ( )

(A)全体实数 (B)*x*>1 (C)*x*≥1 (D)*x*≤1

18．下列函数中，*y*随*x*增大而减小的一个是 ( )

(A)*y*= (B)*y*=(*k*2+1)*x* (C)*y*=(*π*－3)*x* (D)*y*=(1－)*x*

19．下列函数的图像不经过点(2，1)的是 ( )

(A)*y*= (B)*y*= (C)*y*=－1 (D)*y*=2*x*－3

20．下列命题正确的是 ( )

(A)*y*=*kx*(*k*>0)，*y*随*x*的增大而减小 (B)*y*=*kx*(*k*>0)，*y*随*x*的增大而增大

(C)*y*=(*k*>0)，*y*随*x*的增大而减小 (D)*y*=(*k*>0)，*y*随*x*的增大而增大

**三、简答题(每题5分，共20分)**

21．如果*y*=(*t*－1)是正比例函数，且它的图像经过第二、四象限，求*t*的值．

22．已知*y*与2*z*成反比例，*z*与3*x*成正比例，且当*x*=1时，*y*=2，试写出*y*与*x*之间的函数关系式．

23．已知*y*与*x*－3成正比例，当*x*=5时，*y*=求*y*与*x*的函数解析式．

24．已知*x*与*y*之间的关系为*x*=

(1)把它改写成*y*=*f*(*x*)的形式．(2)求自变量*x*的取值范围．

**四、解答题(每题7分，共35分)**

25．已知函数*y*=(*a*+1)*x*－(*b*－3)，当*x*=1时，*y*=3；当*x*=－1时，*y*=－1，求*a*、*b*的值．

26．正比例函数和反比例函数相交于点*P*(5，3)，求这两个函数的解析式及另一个交点的坐标．

27．已知*P*为双曲线*y*=上一点，*PQ*⊥*x*轴于*Q*，*O*是坐标原点，求△*POQ*的面积．

28．已知函数*y*=*y*1+*y*2，*y*1与*x*成反比例，*y*2与*x*－2成正比例，当*x*=1时，*y*=－1；当*x*=3时，*y*=5，求*x*=5时的函数值．

29．设正比例函数*y*=*ax*与反比例函数*y*=的图像有两个交点，且其中一个交点的横坐标是1，求*a*的值和两个函数关系式．

正比例函数和反比例函数单元测试·参考答案

一、1．反比例，*y*=(*k*≠0)，双曲线

2．*x*<1

3．反比例

4．

5．解析法、列表法、图像法

6．2

7．*y*=－

8．反比例

9．*y*=－1

10．*m*=1，*n*=3

11．二

12．二、四

13．减小

14．*m*=2

15．*a*<*b*

二．16．B 17．A 18．D 19．C 20．B．

21．－2

22．*y*=

23．*y*=

24．*y*=*x*≠－1

四、25．*a*=1，*b*=2

26．*y*=；(-5，-3)

27．

28．

29．*a*=2，*y*=2*x*，*y*=